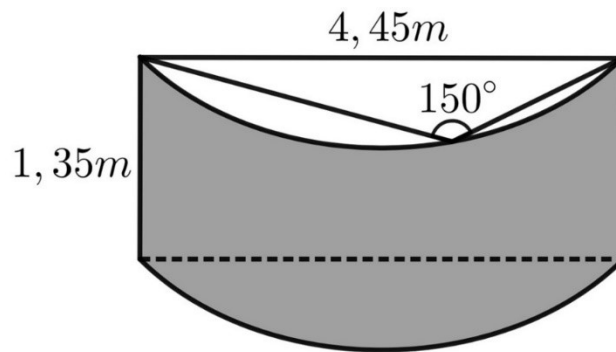


BÀI TOÁN THỰC TẾ

VỀ DIỆN TÍCH XUNG QUANH, DIỆN TÍCH TOÀN PHẦN, THỂ TÍCH CỦA KHỐI NÓN – TRỤ – CẦU

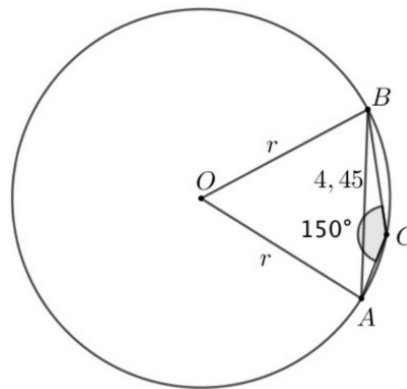
Bài toán mở đầu (ĐỀ MINH HỌA NĂM 2021): Ông Bình làm lan can ban công ngôi nhà của mình bằng một tấm kính cường lực. Tấm kính đó là một phần của mặt xung quanh của một hình trụ như hình. Biết giá tiền của $1m^2$ kính là 1.500.000 đồng. Số tiền (làm tròn đến hàng nghìn) mà ông Bình mua tấm kính trên là bao nhiêu?



Giải:

Bán kính hình trụ là bán kính đường tròn ngoại tiếp $\triangle ABC$.

Theo định lý hàm Sin, ta có: $r = \frac{AB}{2 \sin C} = \frac{4,45}{2 \cdot \sin 150^\circ} = 4,45(m)$.



$\Rightarrow \triangle OAB$ đều $\Rightarrow \widehat{AOB} = 60^\circ$.

Cách 1: Độ dài tấm kính chính là độ dài cung nhỏ AB : $l_{\text{kính}} = \frac{\pi}{3} \cdot r = \frac{89\pi}{60}(m)$.

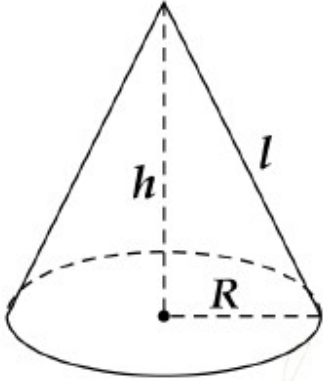
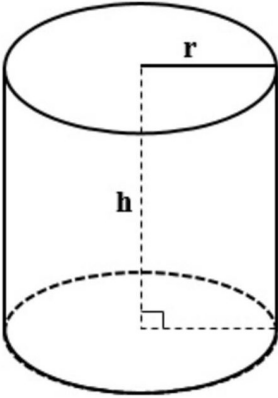
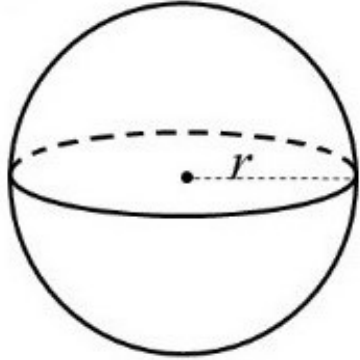
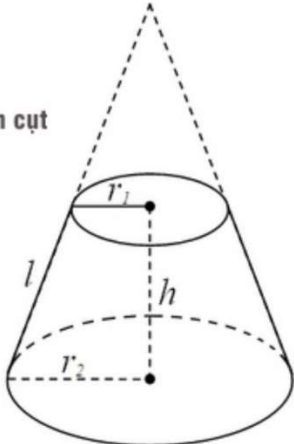
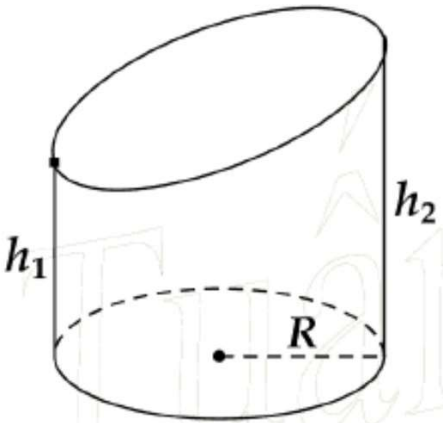
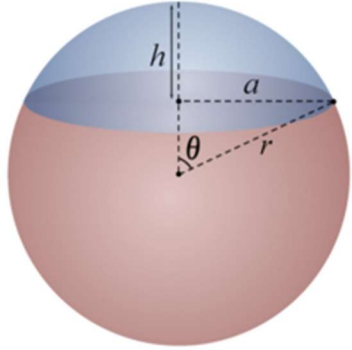
Diện tích tấm kính sử dụng: $S_{\text{kính}} = l_{\text{kính}} \times h = \frac{89\pi}{60} \times 1,35 = \frac{801\pi}{400}(m^2)$.

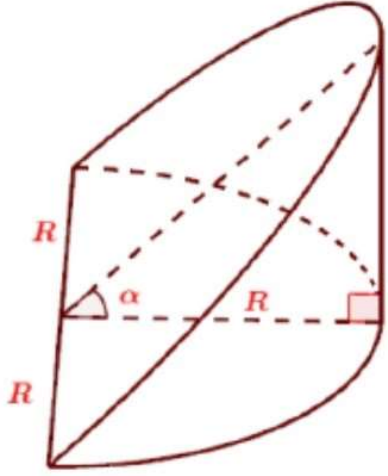
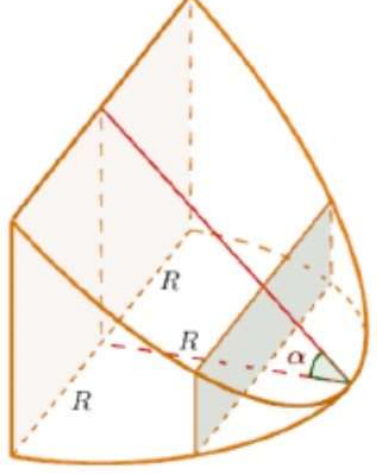
Số tiền cần dùng: $S_{\text{kính}} \times 1,5 \approx 9,436$ triệu đồng.

Cách 2: Vì $\widehat{AOB} = 60^\circ$ nên $S_{\text{kính}} = \frac{1}{6} \times S_{\text{xq}} = \frac{1}{6} \times 2\pi rh = \frac{1}{6} \times 2\pi \times 4,45 \times 1,35 = \frac{801\pi}{400}(m^2)$.

Số tiền cần dùng: $S_{\text{kính}} \times 1,5 \approx 9,436$ triệu đồng.

TÓM TẮT LÝ THUYẾT

Hình nón	Hình trụ	Hình cầu
 1. Diện tích xung quanh: $S_{xq} = \pi Rl$ 2. Diện tích toàn phần: $S_{tp} = \pi Rl + \pi R^2$ 3. Thể tích: $V = \frac{1}{3} \pi R^2 h$	 1. Diện tích xung quanh: $S_{xq} = 2\pi rh$ 2. Diện tích toàn phần: $S_{tp} = 2\pi rh + 2\pi r^2$ 3. Thể tích: $V = \pi r^2 h$	 1. Diện tích: $S = 4\pi r^2$ 2. Thể tích: $V = \frac{4}{3} \pi r^3$
Hình nón cắt	Hình trụ cắt	Chòm cầu
Hình nón cắt  1. Diện tích xung quanh: $S_{xq} = \pi l(r_1 + r_2)$ 2. Diện tích toàn phần: $S_{tp} = S_{xq} + S_{đáy1} + S_{đáy2}$ 2. Thể tích: $V = \frac{1}{3} \pi h(r_1^2 + r_1 r_2 + r_2^2)$	 1. Diện tích xung quanh: $S_{xq} = \pi R(h_1 + h_2)$ 2. Thể tích: $V = \pi R^2 \cdot \frac{h_1 + h_2}{2}$	 1. Diện tích xung quanh: $S_{xq} = 2\pi rh \text{ hay } S_{xq} = \pi(a^2 + h^2)$ 2. Thể tích: $V = \pi h^2 \left(r - \frac{h}{3} \right)$ hay $V = \frac{\pi h}{6} (3a^2 + h^2)$

Hình nôm loại 1	Hình nôm loại 2
 Thể tích: $V = \frac{2}{3} R^3 \cdot \tan \alpha$	 Thể tích: $V = \left(\frac{\pi}{2} - \frac{2}{3} \right) R^3 \cdot \tan \alpha$

BÀI TẬP MINH HỌA:

Câu 1: Một ngôi biệt thự có 10 cây cột nhà hình trụ tròn, tất cả đều có chiều cao bằng $4,2m$. Trong đó, 4 cây cột trước đại sảnh có đường kính bằng $40cm$, 6 cây cột còn lại bên thân nhà có đường kính bằng $26cm$. Chủ nhà dùng loại sơn giả đá để sơn 10 cây cột đó. Nếu giá của một loại sơn giả đá là 380.000 đồng / m^2 (kể cả phần thi công) thì người chủ phải chi ít nhất bao nhiêu tiền để sơn 10 cây cột nhà đó (làm tròn đến đơn vị nghìn đồng)?

Giải:

Phần diện tích phải sơn là tổng diện tích xung quanh của 10 cây cột.

+ Tính diện tích xung quanh của 4 cây cột trước đại sảnh:

Bán kính $r_1 = 20cm = 0,2m$, chiều cao $h = 4,2m$.

Diện tích xung quanh một cột: $S_{xq} = 2\pi r_1 h = 2\pi \times 0,2 \times 4,2 = 1,68\pi (m^2)$

Diện tích xung quanh của 4 cây cột trước đại sảnh: $S_1 = 4 \times 1,68\pi = 6,72\pi (m^2)$

+ Tính diện tích xung quanh của 6 cây cột còn lại:

Bán kính $r_2 = 13cm = 0,13m$, chiều cao $h = 4,2m$.

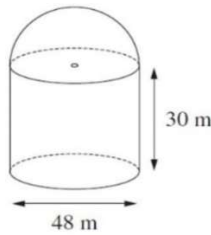
Diện tích xung quanh một cột: $S_{xq} = 2\pi r_2 h = 2\pi \times 0,13 \times 4,2 = 1,092\pi (m^2)$

Diện tích xung quanh của 6 cây cột trước đại sảnh: $S_2 = 6 \times 1,092\pi = 6,552\pi (m^2)$

+ Phần diện tích phải sơn là: $S = S_1 + S_2 = 6,72\pi + 6,552\pi = 13,272\pi (m^2)$

+ Số tiền sơn là: $13,272\pi \times 380000 \approx 15844000$ (đồng).

Câu 2: Một cái tháp khổng lồ có thân là hình trụ và mái là một nửa hình cầu. Người ta muốn sơn toàn bộ mặt ngoài của tháp (kể cả mái). Tính diện tích S cần sơn (làm tròn đến mét vuông).



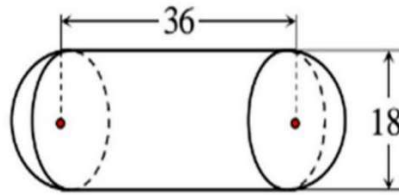
Giải:

Diện tích phần thân (diện tích xung quanh của hình trụ): $S_1 = 2\pi rh = 2\pi \times 24 \times 30 = 1440\pi \text{ (m}^2\text{)}$

Diện tích phần mái (diện tích một nửa mặt cầu): $S_2 = \frac{1}{2} \times 4\pi r^2 = \frac{1}{2} \times 4\pi \times 24^2 = 1152\pi \text{ (m}^2\text{)}$

Diện tích cần sơn: $S = S_1 + S_2 = 2592\pi \text{ (m}^2\text{)} \approx 8139 \text{ (m}^2\text{)}$

Câu 3: Một cái bồn chứa xăng gồm hai nửa hình cầu và một hình trụ như hình vẽ bên. Các kích thước được ghi cùng đơn vị dm . Tính thể tích của bồn chứa.



Giải:

Bán kính của hai nửa hình cầu bằng nhau và bằng bán kính của hình trụ là $R = 9(dm)$.

$\Rightarrow$ Tổng thể tích của hai nửa khối cầu: $V_1 = \frac{4\pi R^3}{3} = \frac{4\pi \cdot 9^3}{3} = 972\pi (dm^3)$.

Chiều cao hình trụ là $h = 36(dm) \Rightarrow$ Thể tích khối trụ: $V_2 = \pi R^2 h = \pi \cdot 9^2 \cdot 36 = 2916\pi (dm^3)$.

Thể tích của bồn chứa: $V = V_1 + V_2 = 3888\pi (dm^3)$.

Câu 4: Một cây kem gồm hai phần: Phần dưới là một khối nón có chiều cao gấp đôi bán kính đáy, phần trên là nửa khối cầu có đường kính bằng đường kính khối nón bên dưới. Thể tích phần kem phía trên bằng $200cm^3$. Thể tích của cả cây kem bằng bao nhiêu?



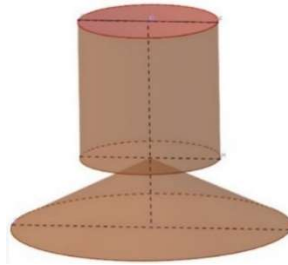
Giải:

Thể tích phần kem phía trên: $V_{kem} = \frac{1}{2} V_{cầu} = \frac{2}{3} \pi r^3 = 200cm^3$.

Thể tích phần bánh phía dưới: $V_{bánh} = \frac{1}{3} \pi r^2 h = \frac{1}{3} \pi r^2 (2r) = \frac{2}{3} \pi r^3 = 200cm^3$.

Thể tích của cả cây kem: $V = V_{kem} + V_{bánh} = 200 + 200 = 400cm^3$.

Câu 5: Một khối đồ chơi gồm một khối hình trụ gắn chồng lên một khối nón, lần lượt có bán kính đáy và chiều cao lần lượt bằng r_1, h_1, r_2, h_2 thỏa $r_2 = 2r_1, h_1 = 2h_2$. Biết thể tích khối nón bằng 200cm^3 . Thể tích của toàn bộ khối đồ chơi bằng bao nhiêu?



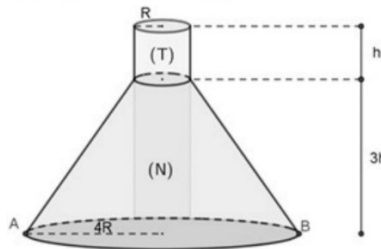
Giải:

$$\text{Thể tích khối nón: } V_1 = \frac{1}{3}\pi r_2^2 h_2 = 200 \Leftrightarrow \pi r_2^2 h_2 = 600$$

$$\text{Thể tích khối trụ: } V_2 = \pi r_1^2 h_1 = \pi \frac{r_2^2}{4} \cdot 2h_2 = \frac{1}{2} \cdot (\pi r_2^2 h_2) = \frac{1}{2} \cdot 600 = 300\text{cm}^3$$

$$\text{Vậy thể tích toàn bộ khối đồ chơi: } V = V_1 + V_2 = 200 + 300 = 500\text{cm}^3.$$

Câu 6: Bình hút chân không bằng thủy tinh là kết hợp của một nón cụt và một hình trụ xếp chồng lên nhau. Bán kính đường tròn đáy của hình trụ và đáy lớn của hình nón cụt lần lượt là R và $4R$, chiều cao của hình trụ và hình nón cụt lần lượt là h và $3h$. Biết thể tích của bình bằng 4dm^3 . Thể tích của khối nón cụt bằng bao nhiêu?

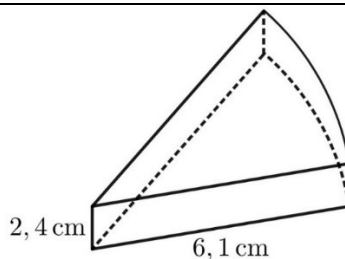


Giải:

$$\text{Thể tích của cả bình: } V = V_t + V_{nc} = \pi R^2 h + \frac{1}{3}\pi \cdot 3h \left(R^2 + R \cdot 4R + (4R)^2 \right) = 21\pi R^2 h = 4 \Leftrightarrow \pi R^2 h = \frac{4}{21}.$$

$$\text{Thể tích của nón cụt: } V_{nc} = V - V_t = 4 - \pi R^2 h = 4 - \frac{4}{21} = \frac{80}{21}\text{dm}^3.$$

Câu 7: Một hộp phô mai dạng hình trụ có bán kính đáy $6,1\text{cm}$ và chiều cao $2,4\text{cm}$. Biết rằng trong hộp có 8 miếng phô mai giống nhau được xếp sát nhau và độ dày của giấy gói từng miếng không đáng kể. Diện tích toàn phần của một miếng phô mai bằng bao nhiêu?



Giải:

Diện tích toàn phần của miếng phô mai bao gồm diện tích của hai mặt đáy, hai mặt bên và mặt cong, trong đó:

$$\text{Diện tích mặt đáy: } S_{\text{đáy}} = \frac{1}{8} S_{\text{đáy trụ}} = \frac{1}{8} \pi r^2.$$

$$\text{Diện tích mặt bên: } S_{\text{bên}} = S_{\text{hcn}} = \text{dài} \times \text{rộng} = r.h$$

$$\text{Diện tích mặt cong: } S_{\text{cong}} = \frac{1}{8} S_{\text{xq}} = \frac{1}{8} . 2\pi rh = \frac{1}{4} \pi rh$$

$$\text{Diện tích toàn phần của miếng phô mai: } S_{\text{tp}} = 2S_{\text{đáy}} + 2S_{\text{bên}} + S_{\text{cong}} = 2 \cdot \frac{1}{8} \pi r^2 + 2.rh + \frac{1}{4} \pi rh \approx 70 \text{ cm}^2$$

Câu 8: Một cốc nước có dạng hình trụ chiều cao là 15 cm , đường kính đáy là 6 cm , lượng nước ban đầu trong cốc cao 10 cm . Thả vào cốc nước 5 viên bi thủy tinh hình cầu có cùng đường kính là 2 cm . Hỏi sau khi thả 5 viên bi, mực nước trong cốc cách miệng cốc bao nhiêu cm ? (Kết quả làm tròn sau dấu phẩy 2 chữ số).

Giải:

$$\text{Thể tích nước ban đầu: } V_1 = \pi r^2 h = \pi \times 3^2 \times 10 = 90\pi (\text{cm}^3).$$

$$\text{Thể tích của 5 viên bi: } V_2 = 5 \times \frac{4}{3} \pi R_{\text{bi}}^3 = \frac{20}{3} \pi (\text{cm}^3).$$

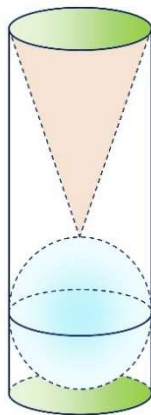
Gọi h_2 là chiều cao của mực nước lúc sau

$$\Rightarrow \text{Thể tích của cốc sau khi thả 5 viên bi vào: } V = V_1 + V_2 = \frac{290}{3} \pi = \pi r^2 h_2 = \pi . 3^2 . h_2$$

$$\Rightarrow h_2 = \frac{290}{27} \approx 10,74 (\text{cm})$$

$$\Rightarrow \text{Mực nước trong cốc cách miệng cốc: } h - 10,74 = 15 - 10,74 = 4,26 (\text{cm}).$$

Câu 9: Trên bàn có một cốc nước hình trụ chứa đầy nước, có chiều cao trong bằng 3 lần đường kính trong của đáy; một viên bi hình cầu và một khối nón đều bằng thủy tinh. Biết viên bi và khối nón đều có đường kính bằng đường kính trong của cốc nước. Người ta từ từ thả vào cốc nước viên bi và khối nón đó thì thấy nước trong cốc tràn ra ngoài. Tính tỉ số thể tích của lượng nước còn lại trong cốc và lượng nước ban đầu.



Giải:

Theo giả thiết và hình vẽ thì:

- Hình trụ có bán kính đáy là R , chiều cao là $h_{trụ} = 6R$.

- Mặt cầu có bán kính là R .

- Hình nón có bán kính đáy là R , chiều cao là $h_{nón} = 6R - 2R = 4R$.

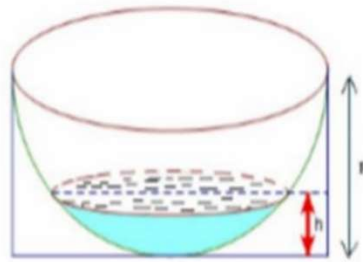
Thể tích lượng nước ban đầu bằng thể tích khối trụ nên $V = \pi R^2 h_{trụ} = \pi R^2 \cdot 6R = 6\pi R^3$.

Thể tích lượng nước tràn ra bằng tổng thể tích khối nón và cầu: $V_1 = \frac{1}{3} \pi R^2 h_{nón} + \frac{4}{3} \pi R^3 = \frac{8\pi R^3}{3}$.

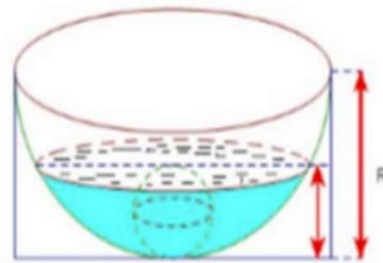
Thể tích lượng nước còn lại trong cốc là: $V_2 = V - V_1 = 6\pi R^3 - \frac{8\pi R^3}{3} = \frac{10\pi R^3}{3}$.

Do đó, tỉ số thể tích của lượng nước còn lại và lượng nước ban đầu: $\frac{V_2}{V} = \frac{\frac{10\pi R^3}{3}}{6\pi R^3} = \frac{5}{9}$.

Câu 10: Một chậu nước hình bán cầu bằng nhôm có bán kính $R = 10\text{cm}$ (hình 1). Trong chậu có chứa sẵn một khối lượng nước hình chỏm cầu có chiều cao $h = 4\text{cm}$. Người ta thả vào chậu một viên bi hình cầu bằng kim loại thì mặt nước dâng lên vừa phủ kín viên bi (hình 2). Tính bán kính của viên bi. (kết quả làm tròn đến 2 chữ số sau dấu phẩy).



Hình 1



Hình 2

Giải:

Thể tích nước ban đầu: $V_1 = \pi h^2 \left(R - \frac{h}{3} \right) = \pi \cdot 4^2 \cdot \left(10 - \frac{4}{3} \right) = \frac{416\pi}{3} (\text{cm}^3)$

Gọi r là bán kính của viên bi hình cầu thả vào, với $0 < r \leq 5 \Rightarrow$ Thể tích viên bi $V_2 = \frac{4}{3} \pi r^3 (\text{cm}^3)$

Gọi h' là chiều cao của lúc sau của chậu nước $\Rightarrow h' = 2r$

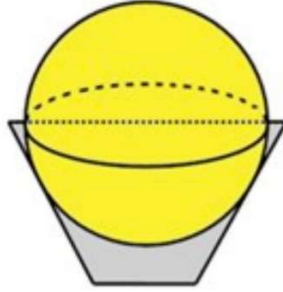
Thể tích chỏm cầu sau khi thả viên bi vào:

$$V = \pi (h')^2 \left(R - \frac{h'}{3} \right) = \pi (2r)^2 \left(10 - \frac{2r}{3} \right) = 4\pi r^2 \left(10 - \frac{2r}{3} \right) (\text{cm}^3)$$

$$\text{Ta có: } V = V_1 + V_2 \Leftrightarrow 4\pi r^2 \left(10 - \frac{2r}{3} \right) = \frac{416\pi}{3} + \frac{4}{3} \pi r^3 \Leftrightarrow 4r^3 - 40r^2 + \frac{416}{3} = 0$$

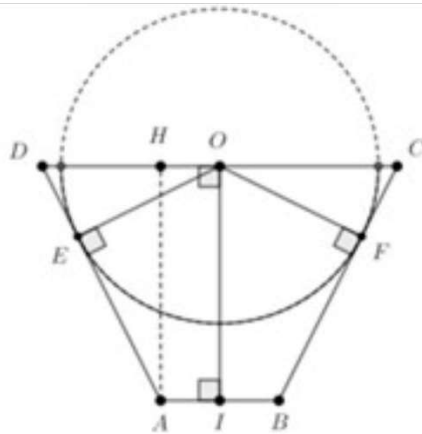
Câu 11: Một cái thùng đựng đầy nước được tạo thành từ cách cắt mặt xung quanh của một hình nón bởi một mặt phẳng vuông góc với trục của hình nón. Miệng thùng là đường tròn có bán kính bằng ba

lần bán kính của đáy thùng. Người ta thả vào đó một khối cầu có đường kính bằng $\frac{3}{2}$ chiều cao của thùng nước và đo được thể tích nước tràn ra ngoài $54\sqrt{3}\pi (dm^3)$. Biết rằng khối cầu tiếp xúc với mặt trong của thùng và đứng một nửa của khối cầu đã chìm trong nước. Thể tích nước còn lại trong thùng có giá trị nào?



Giải:

Xét thiết diện chứa trục trục như hình vẽ bên:



Khối nón cắt có bán kính đáy nhỏ $AI = r$, bán kính đáy lớn $OD = 3r$, chiều cao $OI = h$ và khối cầu tâm O bán kính R .

Thể tích nước tràn ra bằng thể tích nửa khối cầu nên $V_1 = \frac{1}{2} V_c = \frac{2}{3} \pi R_c^3 = 54\sqrt{3}\pi \Leftrightarrow R_c = 3\sqrt{3}$.

Đường kính khối cầu bằng $\frac{3}{2}$ chiều cao thùng nước nên $2R_c = \frac{3}{2}h \Leftrightarrow h = \frac{4}{3}R_c = 4\sqrt{3}$.

Ta có: $\triangle OED$ đồng dạng $\triangle AHD$ nên $\frac{OE}{AH} = \frac{OD}{AD} \Leftrightarrow \frac{R_c}{h} = \frac{3r}{\sqrt{h^2 + 4r^2}} \Leftrightarrow \frac{3\sqrt{3}}{4\sqrt{3}} = \frac{3r}{\sqrt{48 + 4r^2}} \Leftrightarrow r = 2$

Thể tích thùng nước: $V_2 = \frac{1}{3} \pi h (r^2 + 3r^2 + 9r^2) = \frac{1}{3} \pi \cdot 4\sqrt{3} (4 + 12 + 36) = \frac{208\sqrt{3}\pi}{3} (dm^3)$.

Thể tích nước còn lại trong thùng: $V = V_2 - V_1 = \frac{208\sqrt{3}\pi}{3} - 54\sqrt{3}\pi = \frac{46\sqrt{3}\pi}{3} (dm^3)$.

Câu 12: Hai hình nón bằng nhau có chiều cao bằng $2dm$ được đặt như hình vẽ (mỗi hình đều đặt thẳng đứng với đỉnh nằm phía dưới). Lúc đầu hình nón trên chứa đầy nước và hình nón dưới không chứa nước. Sau đó, nước được chảy xuống hình nón dưới thông qua lỗ trống ở đỉnh của hình nón trên. Tính

chiều cao của nước trong hình nón dưới tại thời điểm khi mà chiều cao của nước trong hình nón trên bằng $1dm$.

**Giải:**

Gọi chiều cao ban đầu và bán kính đáy của nước trong hình nón trên là h, r . Gọi chiều cao và bán kính đáy của nước trong hình nón dưới là h', r' .

Theo giả thiết, ta có: $h = 2dm \Rightarrow$ Thể tích nước ban đầu của nón trên: $V_1 = \frac{1}{3}\pi r^2 h = \frac{2}{3}\pi r^2 (dm^3)$.

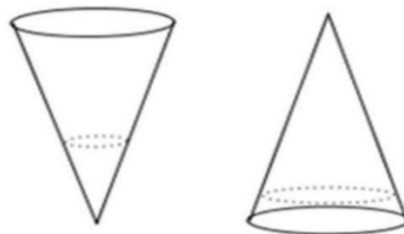
Khi chiều cao của nước trong nón trên còn lại $1dm$, nghĩa là giảm nửa thì bán kính đáy của nước lúc đó cũng giảm nửa. Do đó, thể tích nước còn lại của nón trên: $V_{cl} = \frac{1}{3}\pi \left(\frac{r}{2}\right)^2 \cdot 1 = \frac{1}{12}\pi r^2 (dm^3)$.

Thể tích nước trong nón trên đã chảy xuống nón dưới: $V_2 = V_1 - V_{cl} = \frac{7}{12}\pi r^2 (dm^3)$.

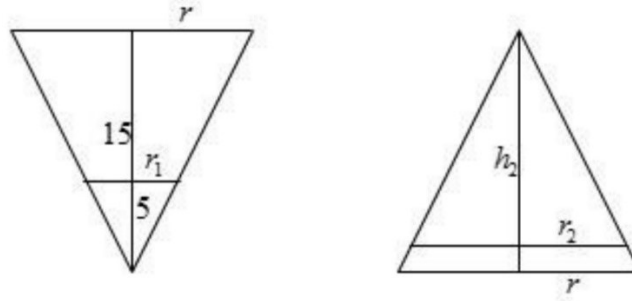
Áp dụng định lý Ta-let, ta có: $\frac{h'}{h} = \frac{r'}{r} \Leftrightarrow r' = \frac{rh'}{2}$.

Thể tích nước trong nón dưới bằng V_2 : $V_2 = \frac{1}{3}\pi r'^2 h' = \frac{1}{3}\pi \left(\frac{rh'}{2}\right)^2 \cdot h' = \frac{7}{12}\pi r^2 \Leftrightarrow h' = \sqrt[3]{7}$.

Câu 13: Một cái phễu có dạng hình nón. Người ta đổ một lượng nước vào phễu sao cho chiều cao của lượng nước trong phễu bằng $\frac{1}{3}$ chiều cao của phễu. Hỏi nếu bịt kín miệng phễu rồi lộn ngược phễu lên thì chiều cao của nước bằng bao nhiêu? Biết rằng chiều cao của phễu là $15cm$.

**Giải:**

Gọi r, r_1, r_2 là bán kính đáy của phễu, của khối nón phần có nước khi ngửa phễu và của khối nón phần không có nước khi úp phễu $\Rightarrow$ chiều cao tương ứng $h = 15, h_1 = \frac{1}{3}h = 5, h_2$.



Theo định lý Talet, ta có: $\frac{r_1}{r} = \frac{h_1}{h} = \frac{1}{3}$, $\frac{r_2}{r} = \frac{h_2}{h} = \frac{h_2}{15}$

Vì thể tích phần không chứa nước như nhau nên ta có:

$$\frac{1}{3}\pi r^2 h - \frac{1}{3}\pi r_1^2 h_1 = \frac{1}{3}\pi r_2^2 h_2 \Leftrightarrow 15r^2 - 5r_1^2 = r_2^2 h_2 \Leftrightarrow 15 - 5\left(\frac{r_1}{r}\right)^2 = \left(\frac{r_2}{r}\right)^2 h_2 \Leftrightarrow 15 - 5 \cdot \frac{1}{9} = \left(\frac{h_2}{15}\right)^2 h_2 \Leftrightarrow h_2 = 5\sqrt[3]{26}$$

Vậy chiều cao của nước khi úp phễu: $h - h_2 = 15 - h_2 = 15 - 5\sqrt[3]{26}$.

Câu 14: Một tấm nhôm hình chữ nhật có hai kích thước là a và $2a$. Người ta cuốn tấm nhôm đó thành một hình trụ. Hình trụ tạo thành có độ dài đường sinh $2a$ thì bán kính đáy bằng bao nhiêu?

Giải:

Cuốn tấm nhôm thành hình trụ có độ dài đường sinh $2a$ thì chu vi của đường tròn đáy là kích thước còn lại, nghĩa là bằng a . Do đó, chu vi đáy hình trụ tạo thành là $C = 2\pi r = a \Rightarrow r = \frac{a}{2\pi}$.

Câu 15: Một miếng tôn hình chữ nhật có chiều dài $98cm$, chiều rộng $30cm$ được uốn theo chiều dài hoặc chiều rộng thành mặt xung quanh của một thùng đựng nước. Biết rằng chỗ mỗi ghép mất $2cm$. Hỏi thùng đựng tối đa được bao nhiêu lít nước?

Giải:

1 lít nước $= 1dm^3$, nên đơn vị đo đổi sang dm .

Phương án 1: Uốn miếng tôn theo chiều dài và mỗi ghép mất $2cm = 0,2dm$ nên chu vi đường tròn đáy còn $96cm = 9,6dm \Rightarrow 2\pi r = 9,6 \Rightarrow r = \frac{4,8}{\pi}dm$. Khối trụ có chiều cao bằng chiều rộng

của hình chữ nhật: $h = 30cm = 3dm$, bán kính đáy $r = \frac{4,8}{\pi}dm$

$$\Rightarrow \text{Thể tích } V_{trụ} = \pi r^2 h = \pi \left(\frac{4,8}{\pi}\right)^2 \times 3 = \frac{1728}{25\pi} \approx 22 \text{ lít.}$$

Phương án 2: Uốn miếng tôn theo chiều rộng và mỗi ghép mất $2cm = 0,2dm$ nên chu vi đường tròn đáy còn $28cm = 2,8dm \Rightarrow 2\pi r = 2,8 \Rightarrow r = \frac{1,4}{\pi}dm$

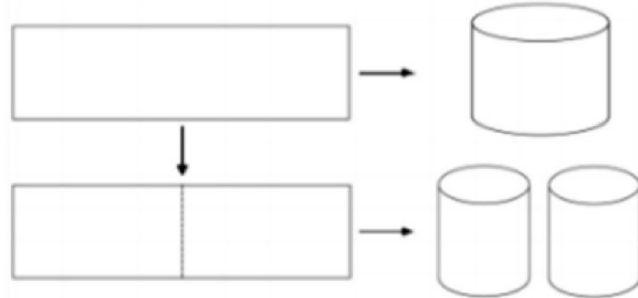
Khối trụ có chiều cao bằng chiều dài của hình chữ nhật: $h = 98cm = 9,8dm$, bán kính đáy

$$r = \frac{1,4}{\pi}dm$$

$$\Rightarrow \text{Thể tích } V_{\text{trụ}} = \pi r^2 h = \pi \left(\frac{1,4}{\pi} \right)^2 \times 9,8 = \frac{2401}{125\pi} \approx 6 \text{ lít.}$$

Vậy sẽ làm thùng đựng nước theo phương án 1 và đựng nước tối đa 22 lít nước.

Câu 16: Từ tấm tôn hình chữ nhật cạnh $50\text{cm} \times 240\text{cm}$, người ta làm các thùng đựng nước hình trụ có chiều cao bằng 50cm theo 2 cách:



Cách 1: Gò tấm tôn ban đầu thành mặt xung quanh của thùng.

Cách 2: Cắt tấm tôn ban đầu thành 2 tấm bằng nhau, rồi gò mỗi tấm đó thành mặt xung quanh của một thùng.

Kí hiệu V_1 là thể tích của thùng gò được theo cách thứ nhất và V_2 là tổng thể tích của hai thùng gò được theo cách thứ 2. Tính tỉ số $\frac{V_1}{V_2}$.

Giải:

Cách 1: Chu vi đáy hình trụ tạo thành: $C_1 = 2\pi r_1 = 240 \Rightarrow r_1 = \frac{120}{\pi} \Rightarrow V_1 = \pi r_1^2 h_1 = \frac{120^2}{\pi} \times 50$

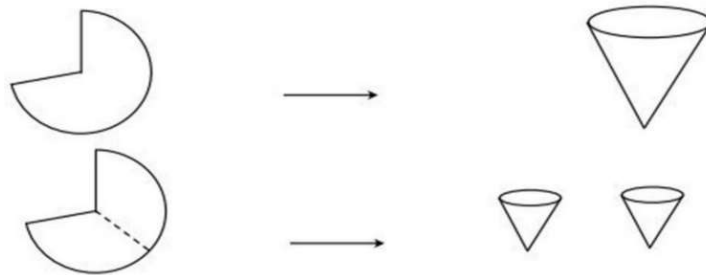
Cách 2: Chu vi đáy của mỗi hình trụ tạo thành: $C_2 = 2\pi r_2 = 120 \Rightarrow r_2 = \frac{60}{\pi}$

Tổng thể tích của hai thùng gò được: $V_2 = 2\pi r_2^2 h_2 = \frac{2 \times 60^2}{\pi} \times 50 \Rightarrow \frac{V_1}{V_2} = 2$

Câu 17: Từ cùng một tấm kim loại dẻo hình quạt có bán kính $R = 5$ và chu vi của hình quạt là $P = 8\pi + 10$, người ta gò tấm kim loại đó thành những chiếc phễu hình nón theo hai cách

+ **Cách 1:** Gò tấm kim loại ban đầu thành mặt xung quanh của một cái phễu.

+ **Cách 2:** Chia đôi tấm kim loại thành hai phần bằng nhau rồi gò thành mặt xung quanh của hai cái phễu.



Gọi V_1 là thể tích của cái phễu ở cách 1, V_2 là tổng thể tích của hai cái phễu ở cách 2. Tính $\frac{V_1}{V_2}$.

Giải:

Theo Cách 1: Hình nón có đường sinh $l_1 = R = 5$, chu vi đường tròn đáy $C_1 = P - 2R = 8\pi$

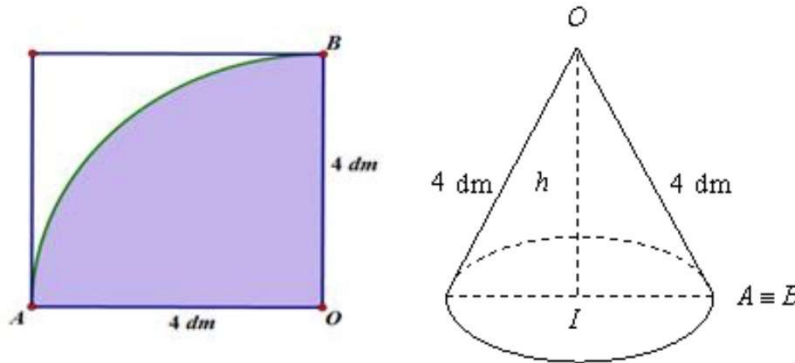
$$\Rightarrow \text{Bán kính } r_1 = \frac{C_1}{2\pi} = 4 \Rightarrow \text{Đường cao } h_1 = \sqrt{l_1^2 - r_1^2} = 3 \Rightarrow \text{Thể tích } V_1 = \frac{1}{3}\pi r_1^2 h_1 = 16\pi$$

Theo Cách 2: Mỗi hình nón có đường sinh $l_2 = R = 5$, chu vi đường tròn đáy $C_2 = \frac{P - 2R}{2} = 4\pi$

$$\Rightarrow \text{Bán kính } r_2 = \frac{C_2}{2\pi} = 2 \Rightarrow \text{Đường cao } h_2 = \sqrt{l_2^2 - r_2^2} = \sqrt{21} \Rightarrow \text{Thể tích } V_2 = 2 \times \frac{1}{3}\pi r_2^2 h_2 = \frac{8\pi\sqrt{21}}{3}$$

$$\text{Vậy } \frac{V_1}{V_2} = \frac{2\sqrt{21}}{7}.$$

Câu 18: Từ miếng tôn hình vuông cạnh bằng $4dm$, người ta cắt ra hình quạt tâm O , bán kính $OA = 4dm$ để cuộn lại thành một chiếc phễu hình nón (khi đó OA trùng với OB). Tính chiều cao của chiếc phễu.

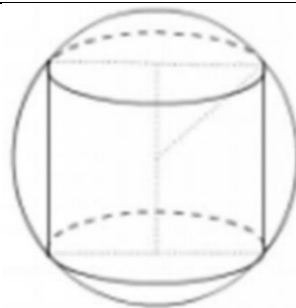


Giải:

Hình nón tạo thành có đỉnh O , đường sinh $l_{\text{nón}} = OA = 4$, chu vi đường tròn đáy bằng độ dài cung AB : $C = l_{\text{AB}} = \alpha \cdot OA = \frac{\pi}{2} \cdot 4 = 2\pi$

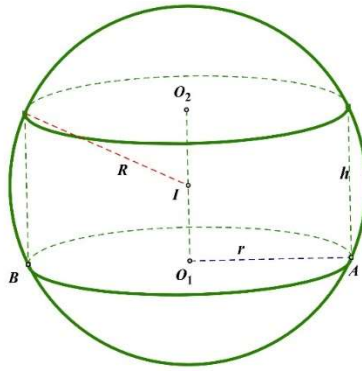
$$\Rightarrow \text{bán kính đáy } r_{\text{nón}} = \frac{C}{2\pi} = 1 \Rightarrow \text{chiều cao phễu } h_{\text{nón}} = \sqrt{l_{\text{nón}}^2 - r_{\text{nón}}^2} = \sqrt{15}$$

Câu 19: Cho một hình trụ có đường kính đáy bằng chiều cao, nội tiếp trong một hình cầu, nghĩa là hai đường tròn đáy của hình trụ nằm trên mặt cầu. Tính tỉ số thể tích giữa khối trụ và khối cầu.



Giải:

Gọi O_1, O_2 là tâm hai đáy của khối trụ, I là trung điểm của O_1O_2 . Khi đó, I là tâm của khối cầu. Gọi AA' là một đường sinh của hình trụ. Gọi r, h là bán kính đáy và chiều cao của khối trụ, R là bán kính của khối cầu.



Theo giả thiết, ta có: $h = 2r$.

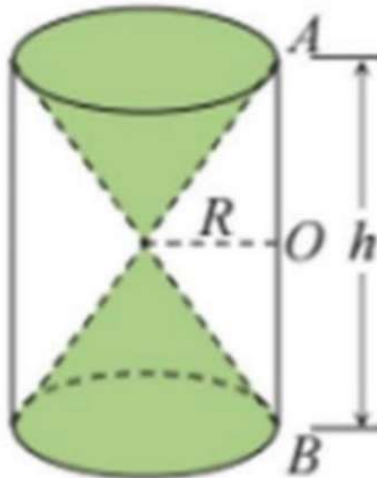
ΔO_1IA vuông tại O_1 có $O_1I = r = O_1A$ nên ΔO_1IA vuông cân tại $O_1 \Rightarrow R = IA = O_1A\sqrt{2} = r\sqrt{2}$

Thể tích của khối trụ: $V_{trụ} = \pi r^2 h = 2\pi r^3$

Thể tích của khối cầu: $V_{cầu} = \frac{4}{3}\pi R^3 = \frac{8\pi\sqrt{2}r^3}{3}$

Tỉ số thể tích: $\frac{V_{trụ}}{V_{cầu}} = \frac{3\sqrt{2}}{8}$.

Câu 20: Hình bên là hình ảnh của một đồng hồ cát với các kích thước kèm theo. Biết $OA = OB$. Hãy tính tỉ số tổng thể tích của hai khối nón (V_n) và thể tích khối trụ (V_1).



Giải:

Thể tích của khối trụ: $V_t = \pi R^2 h$

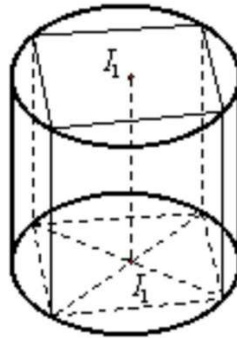
Khối nón: Bán kính bằng R , chiều cao $\frac{h}{2}$. Thể tích hai khối nón: $V_n = 2 \times \frac{1}{3}\pi R^2 \times \frac{h}{2} = \frac{1}{3}\pi R^2 h$

Tỉ số tổng thể tích của hai khối nón và thể tích của khối trụ là: $\frac{V_n}{V_t} = \frac{1}{3}$.

Giải phương trình, ta nhận nghiệm $r \approx 2,09$. Vậy bán kính của viên bi $2,09cm$.

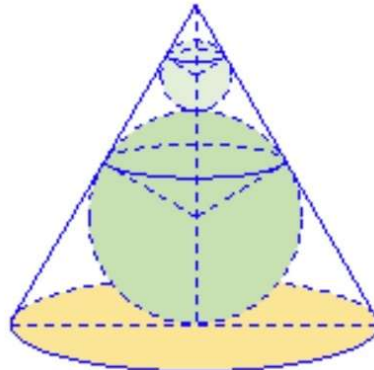
Câu 21: Một khối gỗ hình trụ có chiều cao $2m$. Người ta xẻ bớt gỗ của khối trụ đó theo bốn mặt phẳng song song với trục để tạo thành một khối gỗ hình hộp chữ nhật có thể tích lớn nhất bằng $1m^3$. Tính đường kính của khối gỗ hình trụ đã cho.

Giải:



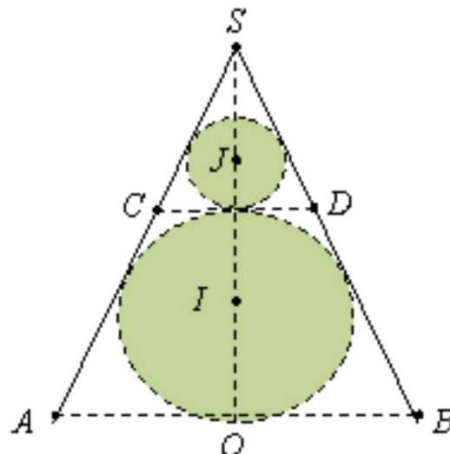
V_{hhcn} đạt giá trị lớn nhất khi và chỉ khi S_d lớn nhất. Vì đáy là hình chữ nhật nên S_d lớn nhất khi và chỉ khi đáy là hình vuông. Ta có: $V_{hhcn} = S_d \cdot h \Rightarrow S_d = \frac{V_{hhcn}}{h} = \frac{1}{2}(m^2) \Rightarrow$ cạnh đáy $a = \sqrt{S} = \frac{\sqrt{2}}{2}(m)$
 Đường kính của khối gỗ hình trụ là đường chéo hình vuông đáy nên $d = a\sqrt{2} = 1(m)$.

Câu 22: Người ta chế tạo một món đồ chơi cho trẻ em theo các công đoạn như sau: Đầu tiên chế tạo một mặt nón có góc ở đỉnh bằng 60° bằng thủy tinh trong suốt, sau đó đặt 2 quả cầu nhỏ bằng thủy tinh có bán kính lớn, nhỏ khác nhau sao cho 2 mặt cầu tiếp xúc với nhau và đều tiếp xúc với mặt nón, mặt cầu lớn còn tiếp xúc với mặt đáy của mặt nón. Biết chiều cao của mặt nón bằng $9cm$. Bỏ qua bề dày của những lớp vỏ thủy tinh, tính tổng thể tích của hai khối cầu.



Giải:

Gọi r_1, r_2 là bán kính của mặt cầu lớn, mặt cầu nhỏ. Thiết diện qua trục của hình nón được biểu diễn như sau:



$$\text{Vì } \widehat{ASB} = 60^\circ \text{ nên } \triangle SAB \text{ đều} \Rightarrow 9 = SO = \frac{AB\sqrt{3}}{2} \Rightarrow AB = 6\sqrt{3}.$$

Gọi I là tâm $\triangle SAB \Rightarrow I$ cũng là tâm của mặt cầu lớn, bán kính mặt cầu lớn r_1 cũng là bán kính đường tròn nội tiếp $\triangle SAB$ đều nên $r_1 = \frac{SO}{3} = 3$

$$\text{Vì } \widehat{CSD} = 60^\circ \text{ nên } \triangle SCD \text{ đều, đường cao } SH = \frac{SO}{3} = 3.$$

Gọi J là tâm $\triangle SCD \Rightarrow J$ cũng là tâm của mặt cầu nhỏ, bán kính mặt cầu nhỏ r_2 cũng là bán kính đường tròn nội tiếp $\triangle SCD$ đều nên $r_2 = \frac{SH}{3} = 1$

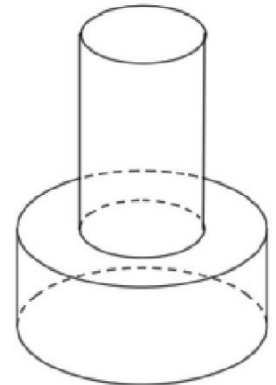
$$\text{Tổng thể tích của 2 mặt cầu là: } V = \frac{4}{3}\pi r_1^3 + \frac{4}{3}\pi r_2^3 = \frac{112}{3}\pi$$

BÀI TẬP TỰ LUYỆN:

Câu 1: Một ngôi biệt thự có 17 cây cột nhà hình trụ tròn, tất cả đều có chiều cao $4,2m$, trong đó, 3 cây cột trước đại sảnh có đường kính $40cm$ và 14 cây cột còn lại bên thân nhà có đường kính $26cm$. Chủ nhà dùng loại sơn giả đá để sơn cây cột đó, biết giá là $360.000 \text{ đồng}/m^2$ (gồm cả tiền thi công) thì người chủ phải chi ít nhất bao nhiêu tiền để sơn 10 cây cột đó (số tiền làm tròn đến hàng nghìn).

Câu 2: Một cơ sở sản xuất có hai bể nước hình trụ có chiều cao bằng nhau, bán kính đáy lần lượt bằng $1m$ và $1,5m$. Chủ cơ sở dự định làm một bể nước mới hình trụ có cùng chiều cao và thể tích bằng tổng thể tích của hai bể nước trên. Tính bán kính đáy của bể nước dự định làm (kết quả làm trong đến chữ số thập phân thứ nhất sau dấu phẩy).

Câu 3: Một khối đồ chơi gồm hai khối trụ $(H_1), (H_2)$ xếp chồng lên nhau, lần lượt có bán kính đáy và chiều cao tương ứng là r_1, h_1, r_2, h_2 thỏa $r_2 = \frac{1}{2}r_1, h_2 = 2h_1$. Biết rằng thể tích của toàn bộ khối đồ chơi bằng $30cm^3$. Tính thể tích khối trụ (H_1) .



Câu 4: Từ $37,26cm^3$ thủy tinh. Người ta làm một chiếc cốc hình trụ có đường kính $8cm$ với đáy cốc dày $1,5cm$, thành xung quanh cốc dày $0,2cm$. Tính chiều cao của chiếc cốc.

Câu 5: Một công ty dự kiến làm một đường ống thoát nước thải hình trụ dài $1km$, đường kính trong của ống (không kể lớp bê tông) bằng $1m$, độ dày của lớp bê tông bằng $10cm$. Biết rằng cứ một khối bê tông, phải dùng 10 bao xi măng. Tính số bao xi măng công ty phải dùng để xây dựng đường ống thoát nước (lấy số gần đúng).

Câu 6: Để làm cống thoát nước cho một con đường, người ta cần đúc 200 ống hình trụ bằng bê tông có đường kính trong lòng ống là $1m$ và chiều cao của mỗi ống bằng $2m$, độ dày của thành ống là $8cm$. Biết rằng $1m^3$ bê tông thì cần đúng 10 bao xi măng. Tính số lượng bao xi măng cần dùng để đúc 200 ống như trên.

Câu 7: Một cái trục lăn sơn nước có dạng một hình trụ. Đường kính của đường tròn đáy là 5cm , chiều dài lăn là 23cm . Sau khi lăn tròn 10 vòng thì trục lăn tạo nên tường phẳng lớp sơn có diện tích bằng bao nhiêu?



Câu 8: Người ta làm tạ tập cơ tay như hình với hai đầu là hai khối trụ bằng nhau và tay cầm cũng là khối trụ. Biết hai đầu là hai khối trụ có đường kính đáy bằng 12, chiều cao bằng 6, chiều dài tạ bằng 30 và bán kính tay cầm là 2. Tính thể tích vật liệu làm nên tạ tay đó.

Câu 9: Một cốc nước có dạng hình trụ đựng nước có chiều cao 12cm , đường kính đáy 4cm , lượng nước trong cốc cao 8cm . Thả vào cốc nước 3 viên bi có cùng đường kính 2cm . Hỏi nước dâng cao cách miệng cốc bao nhiêu cm ?

Câu 10: Một cốc nước có dạng hình trụ đựng nước có chiều cao 15cm , đường kính đáy 6cm , lượng nước trong cốc cao 10cm . Thả vào cốc nước 5 viên bi hình cầu có cùng đường kính 2cm . Hỏi nước dâng cao cách miệng cốc bao nhiêu cm ?

Câu 11: Trong một chiếc hộp hình trụ, người ta bỏ vào đó 2016 quả banh tennis, biết rằng đáy của hình trụ bằng hình tròn lớn trên quả banh và chiều cao của hình trụ bằng 2016 lần đường kính của quả banh. Gọi V_1 là tổng thể tích của 2016 quả banh, V_2 là thể tích của khối trụ. Tính tỉ số $\frac{V_1}{V_2}$.

Câu 12: Một vật có dạng hình nón có chiều cao bằng 40cm . Người ta cắt vật đó bằng một mặt cắt song song với mặt đáy của nó được một hình nón nhỏ có thể tích bằng $\frac{1}{8}$ thể tích khối nón lớn. Tính chiều cao của hình nón nhỏ.

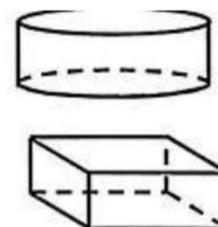
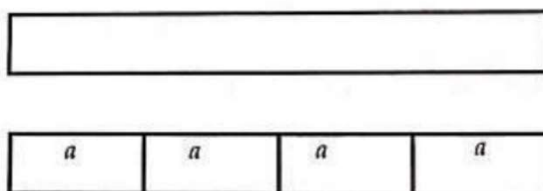
Câu 13: Một bồn hình trụ đang chứa dầu, được đặt nằm ngang, có chiều dài bồn là 5m , có bán kính đáy 1m , với nắp bồn đặt trên mặt nằm ngang của mặt trụ. Người ta rút dầu trong bồn tương ứng với $0,5\text{m}$ của đường kính đáy. Tính thể tích gần đúng nhất của khối dầu còn lại trong bồn.

Câu 14: Một người gò tấm nhôm hình chữ nhật có chiều dài 4m và chiều rộng 2m thành một cái thùng hình trụ đặt trên nền nhà để đựng lúa. Nếu gò tấm nhôm theo chiều dài (trục đứng là chiều rộng) thì số lúa đựng được như thế nào so với tấm nhôm được gò theo chiều rộng (trục đứng là chiều dài)?

Câu 15: Bé Thảo có một tấm bìa có chiều dài 20cm , chiều rộng 1cm . Bé muốn gấp một cái hộp nhỏ xinh để bỏ kẹp tóc vào hộp đó tặng quà cho mẹ ngày 20 tháng 10. Anh Phương đã chỉ cho bé hai cách gấp hộp.

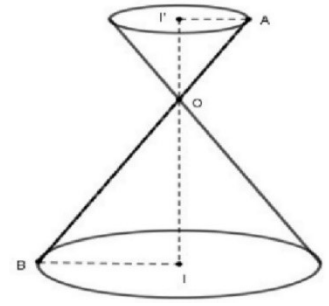
Cách thứ nhất: Bé cuốn tấm bìa thành một cái hộp hình trụ không có 2 đáy có thể tích V_1 .

Cách thứ hai: Bé gấp tấm bìa thành một hình hộp chữ nhật có thể tích V_2 có các kích thước như hình.



Tính tỉ số thể tích của 2 cách gấp để biết gấp theo cách nào sẽ có thể tích lớn hơn.

Câu 16: Cho một đồng hồ cát như hình bên (gồm hai hình nón chung đỉnh ghép lại), trong đó đường sinh bất kỳ của hình nón tạo với đáy một góc 60° . Biết rằng chiều cao của đồng hồ là 30cm và tổng thể tích của đồng hồ là $1000\pi(\text{cm}^3)$. Hỏi nếu cho đầy lượng cát vào phần bên trên thì khi chảy hết xuống dưới, tỉ số thể tích lượng cát chiếm chỗ và thể tích phần phía dưới là bao nhiêu?

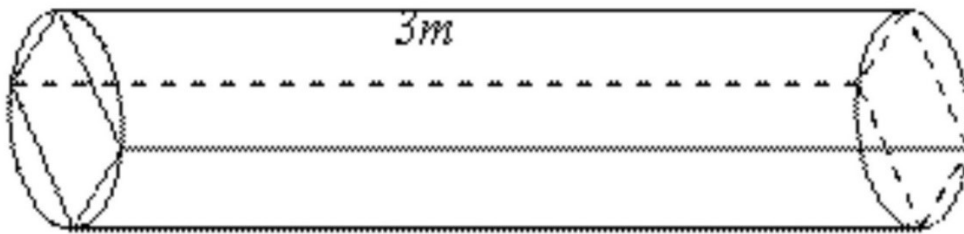


Câu 17: Một bình đựng nước dạng hình nón (không có đáy), đựng đầy nước. Biết rằng chiều cao của bình gấp 3 lần bán kính đáy của nó. Người ta thả vào đó một khối trụ và đo được thể tích nước tràn ra ngoài là $\frac{16}{9}\pi(\text{dm}^3)$. Biết rằng một mặt của khối trụ nằm trên mặt đáy của nón và khối trụ có chiều cao

bằng đường kính đáy của hình nón. Tính diện tích xung quanh của bình nước.

Câu 18: Một chiếc thùng chứa đầy nước có hình một khối lập phương. Đặt vào trong thùng đó một khối nón sao cho đỉnh khối nón trùng với tâm một mặt của khối lập phương, đáy khối nón tiếp xúc với các cạnh của mặt đối diện. Tính tỉ số thể tích của lượng nước trào ra ngoài và lượng nước còn lại ở trong thùng.

Câu 19: Một khúc gỗ hình trụ có chiều cao 3m , đường kính đáy 80cm . Người ta cưa 4 tấm bìa để được một khối lăng trụ đều nội tiếp trong khối trụ. Tính tổng thể tích của 4 mảnh bìa bị cưa, xem mạch cưa không đáng kể.



Câu 20: Người ta xếp 7 viên bi có cùng bán kính r vào một cái lọ hình trụ sao cho tất cả viên bi đều tiếp xúc với đáy, viên bi nằm chính giữa tiếp xúc với 6 viên bi xung quanh và mỗi viên bi xung quanh đều tiếp xúc với đường sinh của hình trụ. Tính diện tích đáy của cái lọ hình trụ.

BÀI TOÁN MAX – MIN

Câu 1: Một khối gỗ hình trụ có chiều cao 2m , người ta xẻ bớt phần vỏ của khối gỗ đó theo bốn mặt phẳng song song với trục để tạo thành một khối gỗ hình hộp chữ nhật có thể tích lớn nhất bằng 1m^3 . Tính đường kính của khối gỗ hình trụ đã cho.

Giải:

Gọi bán kính hình trụ là $r(m)$, chiều dài và chiều rộng khối hộp chữ nhật là $a, b(m)$.

Ta có: $a^2 + b^2 = 4r^2$ và $V_{\text{hộp}} = 2ab$. Vì $a^2 + b^2 \geq 2ab \Rightarrow 2ab \leq 4r^2 \Rightarrow V_{\text{hộp}} \leq 4r^2 \Rightarrow \max V_{\text{hộp}} = 4r^2$.

Theo giả thiết: $\max V_{\text{hộp}} = 1$ nên $4r^2 = 1 \Rightarrow r = \frac{1}{2}$. Vậy đường kính của khối trụ đã cho là $1(m)$.

Câu 2: Một nhà sản xuất cần thiết kế một thùng đựng dầu nhớt hình trụ có nắp đáy với dung tích là $2.000dm^3$. Để tiết kiệm nguyên liệu nhất thì bán kính của nắp đáy phải bằng bao nhiêu?

Giải:

Để tiết kiệm nhiên liệu thì diện tích toàn phần $S_{tp} = 2\pi rl + 2\pi r^2$ nhỏ nhất (vì thùng có nắp đáy).

$$\text{Theo giả thiết: } V_{trụ} = 2.000(dm^3) \Leftrightarrow \pi r^2 h = 2.000(dm^3) \Leftrightarrow h = \frac{2.000}{\pi r^2}$$

$$\text{Nên } S_{tp} = 2\pi r \cdot \frac{2.000}{\pi r^2} + 2\pi r^2 = \frac{4.000}{r} + 2\pi r^2 \quad (r > 0)$$

$$\text{Ta có: } S'_{tp} = \frac{4.000}{r^2} + 4\pi r = \frac{-4.000 + 4\pi r^3}{r^2}.$$

$$S'_{tp} = 0 \Leftrightarrow -4.000 + 4\pi r^3 = 0 \Leftrightarrow r = \sqrt[3]{\frac{1.000}{\pi}} = \frac{10}{\sqrt[3]{\pi}}.$$

Bảng biến thiên:

		$\frac{10}{\sqrt[3]{\pi}}$	
r	0		$+\infty$
S'_{tp}	-	0	+
S_{tp}	$+\infty$	$600\sqrt[3]{\pi}$	$+\infty$

Từ bảng biến thiên ta thấy, diện tích toàn phần của thùng nhỏ nhất khi $r = \frac{10}{\sqrt[3]{\pi}}(dm)$

$$\text{Vậy } r = \frac{10}{\sqrt[3]{\pi}} \approx 6,83(dm).$$

Câu 3: Một nhà máy cần thiết kế một chiếc bể đựng nước hình trụ (không nắp) có dung tích $64\pi m^3$. Tìm bán kính đáy r của hình trụ sao cho hình trụ làm ra ít tốn nhiên liệu nhất.

Giải:

$$\text{Gọi } h \text{ là chiều cao bể nước hình trụ. Thể tích khối trụ: } V = \pi r^2 h = 64\pi \Leftrightarrow h = \frac{64}{r^2}$$

$$\text{Diện tích của phần hình trụ làm bể: } S = S_{xq} + S_d = 2\pi r h + \pi r^2 = \pi \left(\frac{128}{r} + r^2 \right)$$

Cách 1: (Lập bảng biến thiên)

$$\text{Xét hàm số } f(r) = \frac{128}{r} + r^2 \text{ với } r > 0 \Rightarrow f'(r) = -\frac{128}{r^2} + 2r = \frac{2r^3 - 128}{r^2}$$

$$\text{Khi đó: } f'(r) = 0 \Leftrightarrow r = 4$$

Bảng biến thiên:

r	0	4	$+\infty$
$f'(r)$		0	+
$f(r)$		48	

Để hình trụ làm ra ít tốn nhiên liệu nhất thì $f(r)$ nhỏ nhất $\Leftrightarrow r = 4$.

Cách 2: (Bất đẳng thức Cosi)

Áp dụng BĐT AM-GM (Cosi), ta có: $\frac{128}{r} + r^2 = \frac{64}{r} + \frac{64}{r} + r^2 \geq 3\sqrt[3]{\frac{64}{r} \cdot \frac{64}{r} \cdot r^2} = 48$

Dấu "=" xảy ra khi $\frac{64}{r} = r^2 \Leftrightarrow r = 4$

Câu 4: Trong các hình chữ nhật có cùng chu vi và có chiều rộng là a , chiều dài b (a, b thay đổi), người ta gấp lại để tạo thành một hình trụ có chiều cao bằng a . Khối trụ được tạo thành có thể tích lớn nhất là bao nhiêu?

Giải:

Gọi chu vi của hình chữ nhật là: $C = 2(a + b) \Rightarrow a = \frac{C}{2} - b$, (C là hằng số). Điều kiện: $\frac{C}{4} \leq b < \frac{C}{2}$.

Ta có: Chiều cao của hình trụ $h = a$, chu vi đường tròn đáy bằng b (vì bằng chiều dài hình chữ nhật) nên $2\pi r = b \Rightarrow r = \frac{b}{2\pi}$

Ta có: $V_{trụ} = \pi r^2 h = \pi \cdot \left(\frac{b}{2\pi}\right)^2 \cdot a = \pi \left(\frac{b}{2\pi}\right)^2 \left(\frac{C}{2} - b\right) = \frac{-b^3}{4\pi} + \frac{Cb^2}{8\pi} \quad (b > 0)$

$$V'_{trụ} = \frac{-3b^2}{4\pi} + \frac{Cb}{4\pi} = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} b = 0 & (l) \\ b = \frac{C}{3} & (n) \end{cases}$$

Bảng biến thiên:

b	$\frac{C}{4}$	$\frac{C}{3}$	$\frac{C}{2}$
$V'_{trụ}$	+	0	-
$V_{trụ}$		$\frac{C^3}{216\pi}$	

Khối trụ được tạo thành có thể tích lớn nhất là $\frac{C^3}{216\pi}$.

Câu 5: Một nhà sản xuất sữa có hai phương án làm hộp sữa. Hộp sữa có dạng khối hộp chữ nhật hoặc hộp sữa có dạng khối trụ. Nhà sản xuất muốn chi phí bao bì càng thấp càng tốt nhưng vẫn phải chứa được một thể tích xác định là V cho trước. Tính diện tích toàn phần của hộp sữa bé nhất trong hai phương án trên.

Giải:

Phương án 1: Hộp sữa có dạng khối hộp chữ nhật có 3 kích thước lần lượt là a, b, c

$$\Rightarrow V_{\text{hộp}} = abc \geq V$$

Diện tích toàn phần của khối hộp là: $S_{tp} = 2(ab + bc + ca)$.

Áp dụng BĐT Cauchy ta có: $ab + bc + ca \geq 3\sqrt[3]{a^2b^2c^2} \geq 3\sqrt[3]{V^2} \Rightarrow S_{tp} \geq 6\sqrt[3]{V^2} \Rightarrow \min S_{tp} = 6\sqrt[3]{V^2}$

Phương án 2: Hộp sữa có dạng khối trụ có bán kính đáy là r và chiều cao là h

$$\Rightarrow V_{\text{trụ}} = \pi r^2 h \geq V \Rightarrow h \geq \frac{V}{\pi r^2}.$$

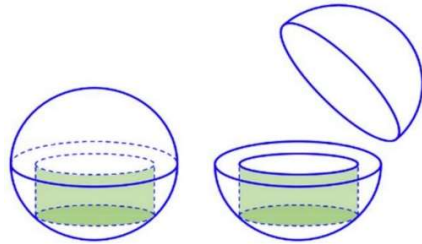
Diện tích toàn phần của khối trụ là:

$$S_{tp} = 2\pi rh + 2\pi r^2 \geq 2\pi \cdot r \cdot \frac{V}{\pi r^2} + 2\pi r^2 = \frac{2V}{r} + 2\pi r^2 = \frac{V}{r} + \frac{V}{r} + 2\pi r^2 \geq 3\sqrt[3]{\frac{V}{r} \cdot \frac{V}{r} \cdot 2\pi r^2} = 3\sqrt[3]{2\pi V^2}$$

$$\Rightarrow \min S_{tp} = 3\sqrt[3]{2\pi V^2}.$$

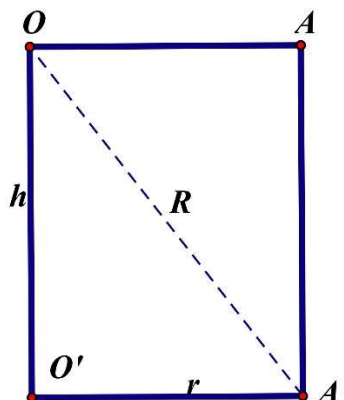
Vì $3\sqrt[3]{2\pi V^2} < 6\sqrt[3]{V^2}$ nên diện tích toàn phần của hộp sữa bé nhất là $3\sqrt[3]{2\pi V^2}$.

Câu 6: Một công ty mỹ phẩm chuẩn bị ra một mẫu sản phẩm dưỡng da mới mang tên Ngọc Trai với thiết kế một khối cầu như viên ngọc trai, bên trong là một khối trụ nằm trong nửa khối cầu để đựng kem dưỡng. Theo dự kiến, nhà sản xuất có dự định để khối cầu có bán kính là $R = 3\sqrt{3} \text{ cm}$. Tính thể tích lớn nhất của khối trụ đựng kem để thể tích thực ghi trên bìà hộp là lớn nhất (với mục đích thu hút khách hàng).



Giải:

Gọi O, O' là tâm của hai đáy của khối trụ. Khi đó, O cũng là tâm của khối cầu. Gọi AA' là một đường sinh của hình trụ. Gọi r, h là bán kính đáy và chiều cao của khối trụ.



$$\text{Ta có: } OA'^2 = OO'^2 + O'A'^2 \Leftrightarrow R^2 = h^2 + r^2 \Leftrightarrow r^2 = R^2 - h^2 = 27 - h^2$$

Thể tích của khối trụ: $V = \pi r^2 h = \pi(27 - h^2)h$

Xét hàm số $f(h) = (27 - h^2)h = 27h - h^3$ với $h \in (0; 3\sqrt{3})$

Ta có: $f'(h) = 27 - 3h^2$

$f'(h) = 0 \Leftrightarrow h = 3$ hay $h = -3$ (l)

Bảng biến thiên:

h	0	3	$3\sqrt{3}$		
$f'(h)$		+	0	-	
$f(h)$			54		

Hàm số $f(h)$ đạt giá trị lớn nhất tại $h = 3$. Vậy thể tích lớn nhất của khối trụ là $V_{\max} = 54\pi$.

Câu 7: Cho một miếng tôn hình tròn có bán kính 50cm . Biết hình nón có thể tích lớn nhất khi diện tích toàn phần của hình nón bằng diện tích miếng tôn ở trên. Tính bán kính của hình nón.

Giải:

Đặt $a = 50\text{cm}$. Gọi r, h, l là bán kính đáy, đường cao và đường sinh của hình nón.

Ta có: $l = \sqrt{h^2 + r^2}$ và diện tích toàn phần $S_{tp} = S_{xq} + S_d = \pi rl + \pi r^2 = \pi r\sqrt{h^2 + r^2} + \pi r^2$

Theo giả thiết, ta có: $S_{tp} = S_{\text{tôn}} \Leftrightarrow \pi r\sqrt{h^2 + r^2} + \pi r^2 = \pi a^2 \Leftrightarrow r\sqrt{h^2 + r^2} + r^2 = a^2 \Leftrightarrow r\sqrt{h^2 + r^2} = a^2 - r^2$

$$\Leftrightarrow r^2(h^2 + r^2) = a^4 - 2a^2r^2 + r^4 \text{ (do } a > r) \Leftrightarrow r^2 = \frac{a^4}{h^2 + 2a^2}$$

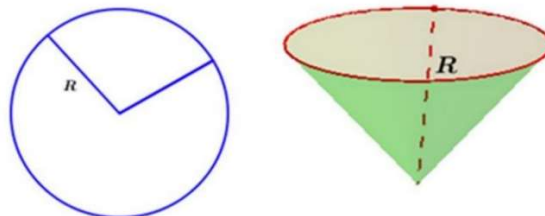
$$\text{Thể tích khối nón là: } V = \frac{1}{3}\pi r^2 h = \frac{1}{3}\pi \frac{a^4}{h^2 + 2a^2} h = \frac{1}{3}\pi a^4 \frac{h}{h^2 + 2a^2}$$

V đạt giá trị lớn nhất khi và chỉ khi $\frac{h^2 + 2a^2}{h}$ đạt giá trị nhỏ nhất.

$$\text{Ta có: } \frac{h^2 + 2a^2}{h} = h + \frac{2a^2}{h} \geq 2\sqrt{h \cdot \frac{2a^2}{h}} = 2\sqrt{2}a$$

$$\text{Vậy } V \text{ đạt giá trị lớn nhất khi và chỉ khi } h = \frac{2a^2}{h} \Leftrightarrow h^2 = 2a^2 \Rightarrow h = a\sqrt{2} \Rightarrow r = \sqrt{\frac{a^2}{4}} = \frac{a}{2} = 25\text{cm}$$

Câu 8: Từ một miếng sắt tây hình tròn bán kính R , ta cắt đi một hình quạt và cuộn phần còn lại thành một cái phễu hình nón. Số đo cung của hình quạt bị cắt đi bao nhiêu độ (tính xấp xỉ) để cái phễu có dung tích lớn nhất.



Giải:

Gọi α (rad) là số đo cung tròn không bị cắt thì độ dài cung tròn tương ứng là $C = \alpha R$

$$\Rightarrow \text{bán kính } r_{\text{nón}} = \frac{C}{2\pi} = \frac{\alpha R}{2\pi}, \text{ đường sinh } l = R$$

$$\Rightarrow \text{chiều cao } h = \sqrt{l^2 - r_{\text{nón}}^2} = \sqrt{R^2 - \left(\frac{\alpha R}{2\pi}\right)^2} = \frac{R}{2\pi} \sqrt{4\pi^2 - \alpha^2}$$

$$\text{Thể tích khối nón } V = \frac{1}{3} \pi r_{\text{nón}}^2 h = \frac{1}{3} \pi \left(\frac{\alpha R}{2\pi}\right)^2 \cdot \frac{R}{2\pi} \sqrt{4\pi^2 - \alpha^2} = \frac{R^3}{24\pi^2} \alpha^2 \sqrt{4\pi^2 - \alpha^2}$$

Xét hàm số $f(\alpha) = \alpha^2 \sqrt{4\pi^2 - \alpha^2}$ với $\alpha \in (0; 2\pi)$.

$$f'(\alpha) = 2\alpha \sqrt{4\pi^2 - \alpha^2} - \alpha^2 \frac{2\alpha}{2\sqrt{4\pi^2 - \alpha^2}} = \frac{\alpha(8\pi^2 - 3\alpha^2)}{\sqrt{4\pi^2 - \alpha^2}}$$

$$f'(\alpha) = 0 \Leftrightarrow \alpha = 0 \text{ hay } \alpha = \pm \frac{2\pi\sqrt{6}}{3}$$

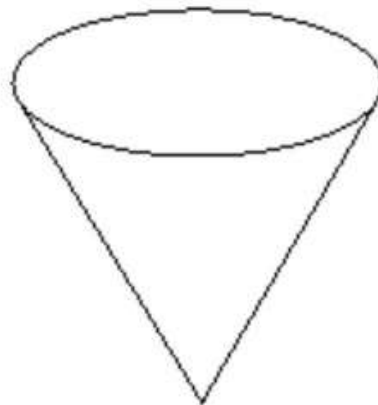
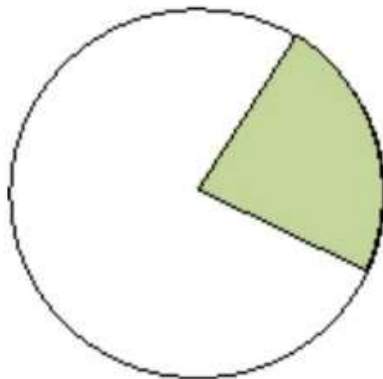
Bảng biến thiên:

α	0	$\frac{2\pi\sqrt{6}}{3}$	2π
$f'(\alpha)$	+	0	-
$f(\alpha)$		$\frac{16\pi^3\sqrt{3}}{9}$	

Thể tích khối nón lớn nhất khi cung tròn hình quạt dùng để cuộn có số đo $\alpha = \frac{2\pi\sqrt{6}}{3}$ (rad), tức

là phần bị cắt có số đo $2\pi - \alpha = \frac{2\pi(3 - \sqrt{6})}{3}$ (rad), xấp xỉ số đo 66° .

Câu 9: Với một miếng tôn hình tròn có bán kính bằng 6cm , người ta muốn làm một cái phễu bằng cách cắt đi một hình quạt của hình tròn này và gấp phần còn lại làm hình nón. Tính thể tích lớn nhất của hình nón đó khi người ta cắt cung tròn của hình quạt.



Giải:

Gọi x ($x > 0$) là độ dài cung tròn của phần được xếp làm hình nón

$$\Rightarrow \text{Chu vi đường tròn đáy của hình nón: } C = x \Rightarrow \text{Bán kính đáy } r = \frac{C}{2\pi} = \frac{x}{2\pi}$$

Đường sinh của hình nón bằng bán kính đường tròn $l = R = 6\text{cm}$

$$\Rightarrow \text{chiều cao } h = \sqrt{l^2 - r^2} = \sqrt{36 - \frac{x^2}{4\pi^2}}$$

$$\text{Thể tích khối nón: } V = \frac{1}{3}\pi r^2 h = \frac{1}{3}\pi \frac{x^2}{4\pi^2} \cdot \sqrt{36 - \frac{x^2}{4\pi^2}}$$

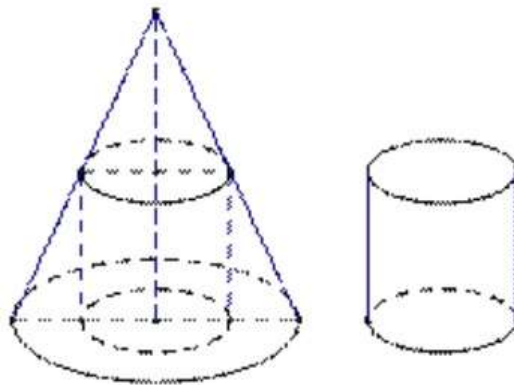
Áp dụng bất đẳng thức Cosi cho 3 số, ta có:

$$\frac{x^2}{8\pi^2} + \frac{x^2}{8\pi^2} + 36 - \frac{x^2}{4\pi^2} \geq 3\sqrt{\frac{x^2}{8\pi^2} \cdot \frac{x^2}{8\pi^2} \cdot \left(36 - \frac{x^2}{4\pi^2}\right)} \Leftrightarrow 12 \geq \sqrt[3]{\frac{1}{4} \cdot \left(\frac{x^2}{4\pi^2}\right)^2 \cdot \left(36 - \frac{x^2}{4\pi^2}\right)}$$

$$\Leftrightarrow 6912 \geq \left(\frac{x^2}{4\pi^2}\right)^2 \cdot \left(36 - \frac{x^2}{4\pi^2}\right) = \left(\frac{3V}{\pi}\right)^2 \Leftrightarrow 1 \geq \frac{V^2}{768} \Leftrightarrow V^2 \leq 768$$

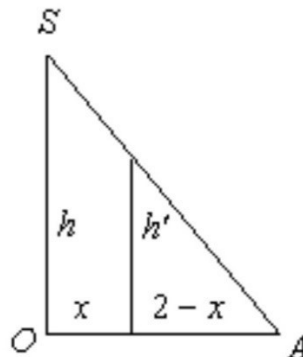
$$V \text{ lớn nhất khi và chỉ khi } \frac{x^2}{8\pi^2} = 36 - \frac{x^2}{4\pi^2} \Leftrightarrow x = 4\pi\sqrt{6}$$

Câu 10: Một khúc gỗ có dạng hình khối nón có bán kính đáy bằng 2m , chiều cao bằng 6m . Bác thợ mộc chế tác từ khúc gỗ đó thành một khúc gỗ có dạng hình khối trụ. Gọi V là thể tích lớn nhất của khúc gỗ hình trụ sau khi chế tác. Tìm V .



Giải:

Giả sử khối trụ có bán kính đáy và đường cao lần lượt là x , h' ($0 < x < 2, 0 < h' < 6$)



Theo định lý Talet trong $\triangle SOA$, ta có: $\frac{h'}{6} = \frac{2-x}{2} \Leftrightarrow h' = 6 - 3x$

Thể tích khối trụ: $V = \pi x^2 h' = \pi x^2 (6 - 3x) = \pi (6x^2 - 3x^3)$

Ta có: $V' = \pi (12x - 9x^2)$. Cho $V' = 0 \Leftrightarrow x = 0$ hay $x = \frac{4}{3}$

Lập bảng biến thiên, ta có: $x = \frac{4}{3}$ thì V đạt giá trị lớn nhất và giá trị đó là $V = \frac{32\pi}{9}$.

Câu 11: Người ta cần chế tạo một cái ly dạng hình cầu, đường kính $2R$ và có một hình trụ tròn xoay nội tiếp trong hình cầu. Nước chỉ chứa được trong hình trụ. Tìm bán kính đáy của hình trụ sao cho để ly chứa được nhiều nước nhất?